Алгебраические уравнения произвольных степеней

1. Введение

Всякий школьник, прежде всего, умеет решать уравнение первой степени: если дано уравнение $ax+b=0$, где $a \neq 0$, то его единственным корнем будет число $x=-b/a$.

Школьник знает, также, формулу для решения квадратного уравнения:

$ax^2-+bx+c=0$, где $a \neq 0$. Именно, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Если коэффициенты уравнения – действительные числа, то эта формула даёт два различных действительных корня, когда под знаком радикала стоит положительное число, т.е. $b^2-4ac>0$. Если же $b^2-4ac=0$, то наше уравнение имеет лишь один корень; его называют в этом случае кратным корнем; при $b^2-4ac<0$ уравнение вообще не имеет действительных корней.

Наконец, школьник умеет решать некоторые типы уравнений третьей и четвёртой степеней, а именно те, решение которых легко сводится к решению квадратных уравнений. Примером может служить уравнение:

$ax^3+bx^2+cx=0$, которое имеет один корень $x=0$, а затем после сокращения на x превращается в квадратное уравнение: $ax^2+bx+c=0$.

К квадратному уравнению также сводится уравнение четвертой степени:

$ay^4+by^2+c=0$, называемое биквадратным; достаточно положить в этом уравнении $y^2=x$, найти корни полученного квадратного уравнения и затем извлечь из них квадратные корни.

2. Комплексные числа

Потребность в комплексных числах возникла в связи с тем, что из отрицательного действительного числе нельзя извлечь квадратный корень, оставаясь в области действительных чисел. Это, как мы знаем, приводит к тому, что некоторые квадратные уравнения не имеют действительных корней; уравнение $x^2+1=0$ будет простейшим из таких уравнений. Нельзя ли расширить запас чисел так, чтобы эти уравнения обладали корнем?

Школьнику несколько раз приходилось встречаться с расширением того запаса чисел, которым он располагает. Он начинал с изучения в элементарной арифметике целых положительных чисел. Очень скоро появились и дроби. В курсе алгебры были добавлены отрицательные числа, т.е. была получена система всех рациональных чисел. Наконец, присоединение иррациональных чисел привело к системе всех действительных (или вещественных) чисел.

Каждое из этих последовательных расширений запаса чисел позволяло находить корни для некоторых из тех уравнений, которые раньше, до рассматриваемого расширения, корней не имели. Так, уравнение $2x-1=0$ стало обладать корнем лишь после введения дробей, уравнение $x+1=0$ – после введения отрицательных чисел, а уравнение $x^2-2=0$ – лишь после присоединения иррациональных чисел.

Все это вполне оправдывает ещё один шаг на пути обогащения запаса чисел, и мы в общих числам наметим сейчас, как этот последний шаг осуществляется.