Преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье применяется при решении многих прикладных задач. К ним относятся тригонометрическая интерполяция, вычисление свертки функций, распознавание образов и многие другие. Дискретное преобразование Фурье стало особенно эффективным методом решения прикладных задач после создания быстрого преобразования Фурье (см. § 4).

Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 1 — разложена в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q \exp\{2\pi \mathbf{i} q x\}, \tag{1}$$

причем

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} |a_q| < \infty. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{i}$ — мнимая единица.

Рассмотрим значения этой функции на сетке из точек $x_l = l/N$, где l, N целые, N фиксировано, и обозначим $f(x_l) = f_l$. Если $q_2 - q_1 = kN$, где k целое, то $q_2 x_l - q_1 x_l = kNx_l = kl$, где kl целое. Следовательно,

$$\exp\{2\pi \mathbf{i} q_1 x\} = \exp\{2\pi \mathbf{i} q_2 x\} \tag{3}$$

в узлах сетки. Поэтому если функция $f(x)$ рассматривается лишь в узлах сетки x_l, то в соотношении (1) можно привести подобные члены

$$f_l = \sum_{q=0}^{N-1} A_q \exp\{2\pi \mathbf{i} q x_l\}, \tag{4}$$

где

$$A_q = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{q+sN}. \tag{5}$$